Fonctions symétriques sur les mots et théorème de Pólya

J.-P. Bultel, **A. Chouria**, J.-G. Luque et O. Mallet

Université de Rouen

École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique 2013

11 avril 2013

✓ Problématique

- Théorème de Pólya
- Ce résultat peut s'énoncer en terme de fonctions symétriques (L'algèbre *Sym* des fonctions symétriques est le premier exemple d'algèbre de **Hopf** Combinatoire)
- Résultat classique : J. H. Redfield (1927) et G. Pólya (1937)
- Relèvement et généralisation du théorème de Pólya à des algèbres non commutatives **(WSym, BWSym)**.

Plan

Définitions

Permutation

- Une permutation de taille *n* est une bijection $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
- $\mathfrak{S}_n$: le groupe symétrique formé par les permutations de taille n dont le produit est la composition.

Exemple

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 123456 \\ 452136 \end{pmatrix}$$ est une permutation de $\mathfrak{S}_6$

Action d'un groupe

- On considère un sous groupe G de $\mathfrak{S}_n$ agissant sur un ensemble fini X.
- Y : un ensemble (peut être l'ensemble des couleurs)
- $Y^x = \{\varphi : X \to Y\}$

On veut comprendre l'action de G sur Y^x
Pour l'action de G sur Y^x on écrit l'application comme des mots et on agit en permutant les places.
Exemple

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $Y = \{a, b\}$
- $G = \{123456, 165432, 345612, 321654, 561234, 543216\}$
- $Y^x = \{aaaaaa, abbaab, \dots\}$

Action d'un groupe

Orbite

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de $\{1 \dots n\}$.

$$O_G(y) = \{\sigma y : \sigma \in G\}$$

L'orbite d'un élément y de Y^x est l'ensemble des éléments de Y^x que l'on peut atteindre partir de y.

- $123456.bababa = bababa$
- $165432.bababa = babaab$
- $321654.bababa = bababa$

$\Rightarrow O_G(bababa) = \{bababa, babaab, \dots\}$

Action d'un groupe

Cycle

Un cycle est une séquence du type $[i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots]$ où i est le plus petit élément de la séquence.

Support de cycle

Le support de cycle d'une permutation σ est l'ensemble des partitions associées à la décomposition de ses cycles.

Exemple

Supp-Cycle $(325614) = \{\{5, 3, 1\}, \{6, 4\}, \{2\}\}$.

Définition

Type cyclique

C'est la séquence décroissante des cardinaux des cycles (des supports des cycles) dans une permutation

Définition

Type cyclique

C'est la séquence décroissante des cardinaux des cycles (des supports des cycles) dans une permutation

Exemple

- Pour une permutation on a défini le support de cycle.
- $Supp - Cycle(643521) = \{\{1, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{3\}\}$.
- Le type cyclique de ce support de cycle est [321]

Le type de l'orbite $(abcbba) = [321]$

Polynôme indicateur de cycle

On considère un ensemble de variables $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

$$Z[G] := \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} p^{type(\sigma)}$$

est le polynôme indicateur de cycle
où $p^\lambda = p_{\lambda_1} \ldots p_{\lambda_n}$ si $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$

Polynôme indicateur de cycle

On considère un ensemble de variables $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

$$Z[G] := \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} p^{type(\sigma)}$$

est le polynôme indicateur de cycle
où $p^\lambda = p_{\lambda_1} \ldots p_{\lambda_n}$ si $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$

Remarques

- Les p^λ sont des variables formelles.
- $Z[G]$ est l'outil principal du théorème de Pólya.

Algèbre des fonctions symétriques

Partition d'entier

- *Sym* est l'algèbre des fonctions symétriques (polynômes invariants par permutations des variables)
- Les bases de *Sym* sont paramétrées par les partitions d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0)$ vecteur décroissant.

Sym est engendrée par :

- Fonctions monomiales : $m_\lambda = \sum_{V=permutation\ de\ \lambda} x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$
- Somme des puissances : $p_n(X) = \sum_{i\geqslant 1} x_i^n$
- p_n est une base multiplicative :
$$p^\lambda = p^{\lambda_1} p^{\lambda_2} \dots p^{\lambda_k}$$

Exemple

Pour un alphabet de taille finie (n=3) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$\checkmark\, m_{31} = x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_1 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_3^3 x_2$$

$$\begin{aligned}
\checkmark\; p^{31} &= p^3 p^1 \\
&= (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1 + x_2 + x_3) \\
&= x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_2^4 + x_2^3 x_1 + x_2^3 x_3 + x_3^4 + x_3^3 x_1 + x_3^3 x_2 \\
&= (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + (x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + ..) \\
&= m_4 + m_{31}
\end{aligned}$$

Polynôme indicateur de cycle

Exemple : Permutation et types cycliques associés :

$$
\begin{aligned}
123456 &\longrightarrow [111111]\\
165432 &\longrightarrow [2211]\\
345612 &\longrightarrow [33]\\
321654 &\longrightarrow [2211]\\
561234 &\longrightarrow [33]\\
543216 &\longrightarrow [2211]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z[G] &= \frac{1}{6}(p_1^6 + p_2^2p_1^2 + p_3p_3 + p_2^2p_1^2 + p_3p_3 + p_2^2p_1^2)\\
&= \frac{1}{6}(\underbrace{p_1^6}_{123456} + \underbrace{3p_1^2p_2^2}_{165432,321654,543216} + \underbrace{2p_3^2}_{345612,561234})
\end{aligned}
$$

Pólya

Théorème de Pólya (Redfield'1927, Pólya'1937)

On exprime le polynôme indicateur de cycle dans la base monomiale (il suffit de développer l'expression en p^λ précédente) par :

$$Z[G] = \sum_\lambda \nu_\lambda m_\lambda$$

où ν_λ est le nombre d'orbites de type λ.

Exemple

- L'énumération est donnée par le changement de base $p^\lambda \longrightarrow m_\lambda$.
- Les coefficients attendus peuvent être représentés par le polynôme indicateur de cycle.

$$
\begin{aligned}
Z[G] = & m[6] + 2m[5,1] + 4m[4,2] + 6m[4,1,1] + 6m[3,3] \\
& + 12m[3,2,1] + 20m[3,1,1,1] + 18m[2,2,2] + 32m[2,2,1,1] \\
& + 60m[2,1,1,1,1] + 120m[1,1,1,1,1,1]
\end{aligned}
$$

Plan

Partition d'ensemble

Partition d'ensemble

Une partition d'ensemble de taille n est une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Exemple

Une partition d'ensemble de taille 6 :

$$\{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{6\}\} \vDash 6$$

Soit G un groupe fini, on notera le polynôme indicateur de support de cycle par :

$$Z[G] = \sum_{\sigma \in G} \Phi^{\pi}$$

avec $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$: Support de cycle de σ

Partition d'ensemble

Partition d'ensemble

- La fonction Φ^{π} est la somme formelle de tous les mots $w = a_1 \ldots a_n$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $i_1, i_2 \in \pi_j$ on a $a_{i_1} = a_{i_2}$
- On va remplacer les Φ^{π} par des fonctions mots symétriques.

Exemple

$$\Phi^{\{1,3,5\},\{2,4,8\},\{6,7\}} = \sum_{a,b,c \in A} ababaccb$$

Si on fait commuter les variables, cette fonction s'envoie sur la somme de puissance correspondante :

$$\Phi^{\{1,3,5\},\{2,4,8\},\{6,7\}} \rightarrow p_3^2 p_2$$

Exemple

On définit les M_π par :

$$M_\pi(\mathbb{A}) = \sum_w w \text{ avec } w = w_1 \dots w_n : i, j \in \pi_k \Leftrightarrow w_i = w_j$$

Et les Φ^π par :

$$\Phi^\pi(\mathbb{A}) = \sum_w w \text{ avec } w = w_1 \dots w_n : i, j \in \pi_k \Rightarrow w_i = w_j$$

Exemple

$$M_{\{1,4\},\{2,3,5\}}(\mathbb{A}) = \sum_{a \neq b \in \mathbb{A}} abbab$$

$$\Phi^{\{1,4\},\{2,3,5\}}(\mathbb{A}) = \sum_{a \neq b \in \mathbb{A}} abbab + \sum_{a = b \in \mathbb{A}} abbab$$
$$= M_{\{1,4\},\{2,3,5\}}(\mathbb{A}) + M_{\{1,2,3,4,5\}}(\mathbb{A})$$

Pólya dans WSym

L'objectif ici est de faire le lien entre le théorème de Pólya et les bases M et Φ puis exprimé le théorème à l'aide de *WSym*.

Pour un groupe fini G, on a dit que le polynôme indicateur de support de cycle est

$$Z[G] = \sum_{\sigma \in G} \Phi^{Supp-cycle(\sigma)}$$

Pólya dans WSym

Exemple : Un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ est l'ensemble des permutations de taille 6 et les supports des cycles associés :

$$123456 \longrightarrow \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$$
$$165432 \longrightarrow \{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}$$
$$345612 \longrightarrow \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$$
$$321654 \longrightarrow \{\{1,3\},\{4,6\},\{2\},\{5\}\}$$
$$561234 \longrightarrow \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$$
$$543216 \longrightarrow \{\{1,5\},\{2,4\},\{3\},\{6\}\}$$

$$\begin{aligned} Z[G] :=& \Phi^{\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}} + \Phi^{\{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}} \\ &+ \Phi^{\{\{1,3\},\{4,6\},\{2\},\{5\}\}} + \Phi^{\{\{1,5\},\{2,4\},\{3\},\{6\}\}} \\ &+ 2\Phi^{\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}} \end{aligned}$$

Pólya

Exemple

Si on développe $Z[G]$ de l'exemple précédent sur les M.
On trouve un coefficient 2 pour $M_{\{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}}$
$\Rightarrow$ Cela est dû au fait qu'il y a deux éléments de G qui laissent invariant la partition $\{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}$ (le mot *abcdcb*) :

- La permutation identité 123456
- la permutation 165432 qui échange $2 \rightleftarrows 6$ et $3 \rightleftarrows 5$

- Le stabilisateur d'un mot pour l'action d'un groupe G est un sous-groupe de G laissant le mot invariant.
- La multiplicité que l'on veut calculer est donc égale au cardinal de ce sous-groupe.
- Le stabilisateur de *abcdcb* est le groupe à deux éléments 123456 et 165432

Pólya dans WSym

Théorème (Bultel,Chouria,Luque et Mallet'2013)

En terme des fonctions monomiales dans WSym le polynôme indicateur de cycle est donné par :

$$Z[G] = \sum \alpha_\pi M_\pi$$

avec α_π est le cardinal du stabilisateur d'un objet de type π.

Plan

Partition d'ensemble en listes

Partition d'ensemble en listes

Une partition d'ensemble en listes est un objet qui peut être construit à partir d'une partition d'ensemble en ordonnant ses blocs.

Exemple

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow \{[1, 3], [2, 4, 5], [6]\} \neq \{[3, 1], [2, 4, 5], [6]\}$

sont deux partitions d'ensemble en listes différentes.

Partition d'ensemble en listes

Propriété

Une partition d'ensemble en listes de taille *n* est en bijection avec un couple (σ, π) : support de cycle de σ soit plus fin que π

- σ est une permutation de taille *n*
- π est une partition d'ensemble

Partition d'ensemble en listes

Propriété

Une partition d'ensemble en listes de taille *n* est en bijection avec un couple (σ, π) : support de cycle de σ soit plus fin que π

- σ est une permutation de taille *n*
- π est une partition d'ensemble

Exemple

$$\{[4,1,5],[7,3],[6],[2]\} \sim \begin{pmatrix} 4271563 \\ \{\{1,4,5\},\{6\},\{3,7\},\{2\}\} \end{pmatrix}$$

avec Supp-Cycle$(4271563) = \{\{1,4\},\{3,7\},\{2\},\{5\},\{6\}\}$

$$\{\{1,4\},\{3,7\},\{2\},\{5\},\{6\}\} \leqslant \{\{1,4,5\},\{6\},\{3,7\},\{2\}\}$$

Polynôme indicateur de cycle

On donne une autre expression du polynôme indicateur de cycle :

$$Z[G] := \sum_{\sigma \in G} \Phi^{\left(supp - \overset{\sigma}{sycle}(\sigma)\right)}$$

Polynôme indicateur de cycle

On donne une autre expression du polynôme indicateur de cycle :

$$Z[G] := \sum_{\sigma\in G} \Phi^{\left(\overset{\sigma}{supp-sycle(\sigma)}\right)}$$

Exemple

$$\begin{aligned} Z[G] = \quad & \Phi^{\left(\overset{123456}{\{\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\}}\right)} + \Phi^{\left(\overset{165432}{\{\{1\}\{26\}\{35\}\{4\}\}}\right)} + \Phi^{\left(\overset{345612}{\{\{135\}\{246\}\}}\right)} \\ + \quad & \Phi^{\left(\overset{321654}{\{\{13\}\{2\}\{46\}\{5\}\}}\right)} + \Phi^{\left(\overset{561234}{\{\{135\}\{246\}\}}\right)} + \Phi^{\left(\overset{543216}{\{\{15\}\{234\}\{6\}\}}\right)}. \end{aligned}$$

Pólya dans l'algèbre *BWSym*

- Nous donnons une version du théorème de Pólya dans l'algèbre *BWSym*.
- À l'aide de cette interprétation on obtient une version sans multiplicités.

Remarque

D'après l'exemple précédent, nous remarquons que le coefficient de $\Phi^{\{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}}$ dans $Z[G]$ est 2 qu'on peut l'obtenir à partir de $\Phi^{\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}}$ et $\Phi^{\{\{2,6\},\{3,5\},\{1\},\{4\}\}}$ associé aux deux permutations (123456) et (165432) qui laissent invariant le mot *abcdcb* (sont des stabilisateurs pour le mot).

Pólya dans l'algèbre *BWSym*

- Les Φ engendrent un espace vectoriel dont une autre base est donnée par les M (Φ^{Π} et M^{Π}).
- Les bases sont indexées par des partitions d'ensemble en listes.
- On appelera BWSym cet espace

Remarque

$\Rightarrow$ La relation entre ces deux bases est donnée par :

$$\Phi^{\binom{\sigma}{\pi}} = \sum_{\pi \leqslant \pi'} M_{\binom{\sigma}{\pi'}}$$

Pólya dans l'algèbre *BWSym*

Exemple :

$$\Phi^{\{[3,1],[2]\}} = M_{\{[3,1],[2]\}} + M_{\{[3,2,1]\}}$$

Théorème (Bultel,Chouria,Luque et Mallet'2013)

L'expression du polynôme indicateur de cycle dans BWSym :

$$Z[G] := \sum_{\sigma \in G} \Phi^{\left(supp - \overset{\sigma}{sycle}(\sigma)\right)} = \sum_{\pi} \sum_{\sigma \in Stab_{\pi}(G)} M_{\binom{\sigma}{\pi}}$$

Conclusion

- Sym et WSym ont une structure d'algèbre de Hopf (Sagan et Rosas)
- Nous avons doté BWSym d'une structure d'algèbre de Hopf ainsi que d'une réalisation polynomiale en terme de bi-mots.
- Nous avons relèvé de théorème de Pólya dans WSym et BWSym.
- Travail à faire :
  $\Rightarrow$ Implémenter des algèbres (*WSym*, *BWSym*) avec *Sage* afin de trouver d'autres propriétés plus intéressantes.
  $\Rightarrow$ On va étudier les polynômes de *Bell* dans WSym et BWSym.

- Accepté à la 25ème conférence internationale sur les séries formelles et la combinatoire algébrique (24 ▹ 28 juin 2013).
- Lien : http ://www.arxiv.org/pdf/1302.5815

Merci pour votre attention...