Génération aléatoire "uniforme" de mots avec motifs interdits et maximisation de l'entropie.

Irène Marcovici
Travail en commun avec Jean Mairesse
LIAFA, Université Paris Diderot - Paris 7

Perpignan, Jeudi 11 avril 2013

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à n lettres.
On se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ et on considère l'ensemble Σ_M des mots w sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tels que si $M_{i,j} = 0$, w ne contient pas le motif ij.

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } ij \text{ est un motif autorisé,} \\ 0 \text{ si } ij \text{ est un motif interdit.} \end{cases}$$

$$\Sigma_M = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} ; \forall k \in \mathbb{Z}, M_{w_k, w_{k+1}} = 1\}.$$

Sous-décalages de type fini

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à n lettres.
On se donne une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ et on considère l'ensemble Σ_M des mots w sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tels que si $M_{i,j} = 0$, w ne contient pas le motif ij.

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } ij \text{ est un motif autorisé,} \\ 0 \text{ si } ij \text{ est un motif interdit.} \end{cases}$$

$$\Sigma_M = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} ; \forall k \in \mathbb{Z}, M_{w_k, w_{k+1}} = 1\}.$$

Soit σ l'application de décalage (*shift*) : $\sigma : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.
Le système dynamique (Σ_M, σ) est un sous-décalage de type fini (*subshift of finite type*).
Par extension, on dit aussi que Σ_M est un SFT.

Exemple : le SFT de Fibonacci

Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Le SFT de Fibonacci est l'ensemble des mots qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs. Il est défini par la matrice:

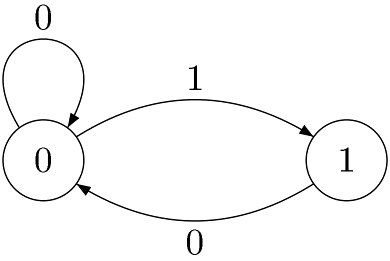
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple : le SFT de Fibonacci

Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Le SFT de Fibonacci est l'ensemble des mots qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs. Il est défini par la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi représenter les contraintes par un automate fini.



Objectifs

Soit Σ_M un SFT. On note $\mathcal{W}_k$ l'ensemble des mots autorisés de longueur k.

Objectifs

Soit Σ_M un SFT. On note $\mathcal{W}_k$ l'ensemble des mots autorisés de longueur k.

Deux objectifs.

- Estimer la vitesse de croissance de $|\mathcal{W}_k|$ et plus précisément déterminer l'entropie topologique du SFT:

$$h(\Sigma_M) = \lim_{k \to \infty} \frac{\log |\mathcal{W}_k|}{k}.$$

- Savoir générer “uniformément” des mots de Σ_M.

Éléments de réponse

D'après le théorème de Perron-Frobenius, la matrice M a une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $|\mu| \leq \lambda$ pour toute autre valeur propre μ. De plus, λ admet des vecteurs propres à gauche et à droite ayant des coordonnées positives.

Éléments de réponse

D'après le théorème de Perron-Frobenius, la matrice M a une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $|\mu| \leq \lambda$ pour toute autre valeur propre μ. De plus, λ admet des vecteurs propres à gauche et à droite ayant des coordonnées positives.

Proposition [folklore]

$$h(\Sigma_M) = \lim_{k \to \infty} \frac{\log |\mathcal{W}_k|}{k} = \log \lambda.$$

Éléments de réponse

D'après le théorème de Perron-Frobenius, la matrice M a une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $|\mu| \leq \lambda$ pour toute autre valeur propre μ. De plus, λ admet des vecteurs propres à gauche et à droite ayant des coordonnées positives.

Proposition [folklore]

$$h(\Sigma_M) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log|\mathcal{W}_k|}{k} = \log\lambda.$$

Exemple : pour le SFT de Fibonacci, l'entropie topologique vaut

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Éléments de réponse

Soit $p = (p_i)_{i \in S}$ une distribution de probabilité sur un ensemble fini S. L'entropie de p est définie par:

$$h(p) = -\sum_{i \in S} p_i \log(p_i).$$

L'entropie est maximale pour la distribution uniforme, pour laquelle $h(p) = \log |S|$.

Éléments de réponse

Soit $p = (p_i)_{i \in S}$ une distribution de probabilité sur un ensemble fini S. L'entropie de p est définie par:

$$h(p) = -\sum_{i \in S} p_i \log(p_i).$$

L'entropie est maximale pour la distribution uniforme, pour laquelle $h(p) = \log |S|$.
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, invariante par translation. Son entropie est définie par:

$$h(\mu) = \lim_{k \to \infty} \frac{h(\mu_k)}{k}$$

où μ_k est la mesure induite par μ sur $\mathcal{A}^k$.

Éléments de réponse

Soient ℓ et r les vecteurs propres à gauche et à droite associés à λ, de coordonnées positives, avec $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^n \ell_i r_i = 1$.

Proposition [Shannon, Parry]

Il existe une unique mesure μ d'entropie maximale : c'est la mesure de Parry, donnée par la chaîne de Markov de noyau de transition

$$P_{i,j} = M_{i,j} \frac{r_j}{\lambda r_i},$$

et de distribution stationnaire $\pi(i) = \ell_i r_i$.
De plus, son entropie est égale à l'entropie topologique $\log \lambda$.

Éléments de réponse

Soient ℓ et r les vecteurs propres à gauche et à droite associés à λ, de coordonnées positives, avec $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^n \ell_i r_i = 1$.

Proposition [Shannon, Parry]

Il existe une unique mesure μ d'entropie maximale : c'est la mesure de Parry, donnée par la chaîne de Markov de noyau de transition

$$P_{i,j} = M_{i,j} \frac{r_j}{\lambda r_i},$$

et de distribution stationnaire $\pi(i) = \ell_i r_i$.
De plus, son entropie est égale à l'entropie topologique $\log \lambda$.

Exemple : pour Fibonacci,
$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & \frac{1}{\varphi^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\pi(0) = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}$, $\pi(1) = \frac{1}{1+\varphi^2}$.

Propriétés de la mesure de Parry

Soit $w = w_1 \dots w_k$. On a

$$\begin{aligned} \mu(w) &= \pi(w_1) P_{w_1,w_2} \dots P_{w_{k-1},w_k} \\ &= M_{w_1,w_2} \dots M_{w_{k-1},w_k} \frac{r_{w_2}}{\lambda r_{w_1}} \dots \frac{r_k}{\lambda r_{w_k-1}} \\ &= M_{w_1,w_2} \dots M_{w_{k-1},w_k} \frac{r_{w_k}}{\lambda^{k-1} r_{w_1}} \end{aligned}$$

Conditionnellement aux valeurs de la première et de la dernière lettre, tous les mots autorisés de même longueur ont la même probabilité.

Propriétés de la mesure de Parry

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= A_{i,j}\frac{r_j}{\lambda r_i} \\ &= M_{i,j}\frac{r_j}{\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} r_k} \end{aligned}$$

Propriétés de la mesure de Parry

$$
\begin{aligned}
P_{i,j} &= A_{i,j}\frac{r_j}{\lambda r_i} \\
&= M_{i,j}\frac{r_j}{\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} r_k} \\
&= \frac{\text{“proba de } j\text{”}}{\text{“proba de tirer un successeur de } i\text{”}}
\end{aligned}
$$

Propriétés de la mesure de Parry

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= A_{i,j} \frac{r_j}{\lambda r_i} \\ &= M_{i,j} \frac{r_j}{\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} r_k} \\ &= \frac{\text{``proba de } j\text{''}}{\text{``proba de tirer un successeur de } i\text{''}} \end{aligned}$$

Proposition

Une manière de générer des mots selon la mesure de Parry consiste à tirer successivement et de manière indépendante des lettres de $\mathcal{A}$ selon la distribution de probabilité r, et à rejeter les lettres qui donneraient un motif interdit.

Propriétés de la mesure de Parry

$$
\begin{aligned}
P_{i,j} &= A_{i,j}\frac{r_j}{\lambda r_i} \\
&= M_{i,j}\frac{r_j}{\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} r_k} \\
&= \frac{\text{“proba de } j\text{”}}{\text{“proba de tirer un successeur de } i\text{”}}
\end{aligned}
$$

Proposition

Une manière de générer des mots selon la mesure de Parry consiste à tirer successivement et de manière indépendante des lettres de $\mathcal{A}$ selon la distribution de probabilité r, et à rejeter les lettres qui donneraient un motif interdit.

Exemple : pour Fibonacci, tirer des 0 et des 1 de manière i.i.d avec les probabilités respectives $r_0 = \frac{1}{\varphi}$ et $r_1 = \frac{1}{\varphi^2}$ et effacer les 1 obtenus lorsque le mot en cours se termine déjà par un 1.

Propriétés de la mesure de Parry

On dit qu'un SFT est confluent si pour tous i, j, k tels que ij et jk sont des motifs interdits, on a $i = k$.

Proposition

Étant donné un SFT confluent, il existe des probabilités $(p_i)_{i \in \mathcal{A}}$ telles que la mesure de Parry peut être réalisée en tirant successivement des lettres selon la distribution p et en effaçant les motifs interdits qui apparaissent.

Remarque : la démonstration montre de plus que les p_i peuvent prendre au plus deux valeurs distinctes, selon s'il existe une lettre j telle que les motifs ij et ji sont interdits, ou non.
Ceci rend le calcul des p_i facile.

Propriétés de la mesure de Parry

On dit qu'un SFT est confluent si pour tous i, j, k tels que ij et jk sont des motifs interdits, on a $i = k$.

Proposition

Étant donné un SFT confluent, il existe des probabilités $(p_i)_{i\in\mathcal{A}}$ telles que la mesure de Parry peut être réalisée en tirant successivement des lettres selon la distribution p et en effaçant les motifs interdits qui apparaissent.

Remarque : la démonstration montre de plus que les p_i peuvent prendre au plus deux valeurs distinctes, selon s'il existe une lettre j telle que les motifs ij et ji sont interdits, ou non.
Ceci rend le calcul des p_i facile.

Exemple : pour Fibonacci, tirer des 0 et des 1 de manière i.i.d avec les probabilités respectives $p_0 = \frac{1}{\varphi^2}$ et $p_1 = \frac{1}{\varphi}$ et effacer les motifs 11 qui apparaissent.

Objectifs

Objectif : mieux comprendre la structure de la (ou des) mesure(s) d'entropie(s) maximale(s) sur $\mathbb{Z}^d$.

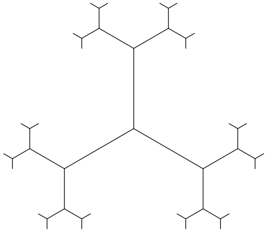
Exemple : SFT de Fibonacci sur $\mathbb{Z}^2$ (interdit d'avoir deux 1 consécutifs, horizontalement ou verticalement).
On ne sait pas calculer l'entropie topologique, ni décrire la mesure d'entropie maximale.

Objectifs

Objectif : mieux comprendre la structure de la (ou des) mesure(s) d'entropie(s) maximale(s) sur $\mathbb{Z}^d$.

Exemple : SFT de Fibonacci sur $\mathbb{Z}^2$ (interdit d'avoir deux 1 consécutifs, horizontalement ou verticalement).
On ne sait pas calculer l'entropie topologique, ni décrire la mesure d'entropie maximale.

Un autre objectif : comprendre comment la théorie peut s'étendre à des SFT définis sur des arbres...



Bibliographie

Livres

- D. Lind - B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*, 1995.
- B. Kitchens. *Symbolic dynamics*, 1998.

Articles

- R. Burton - J.E. Steif. *Non-uniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type*, 1994.
- R. Burton - J.E. Steif. *New results on measures of maximal entropy*, 1995.
- L. Bowen. *Non-abelian free group actions: Markov processes, the Abramov-Rohlin formula and Yuzvinskii's formula*, 2010.