Matroïdes et matroïdes orientés : I

J. Ramírez Alfonsín

I3M, Université Montpellier 2

École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique,

Perpignan, 11 avril 2013

Matroïdes

Introduits par Whitney en 1935.

Matroïdes

Introduits par Whitney en 1935.

Un matroïde peut être défini comme une structure combinatoire obtenue en retenant les principales propriétés ensemblistes de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels.

Indépendants

Un matroïde M est une paire ordonnée $(E, \mathcal{I})$ où E est un ensemble fini ($E = \{1, \ldots, n\}$) et $\mathcal{I}$ est une famille de sous-ensembles de E qui vérifie les conditions suivantes :

($I1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

($I2$) Si $I \in \mathcal{I}$ et $I' \subset I$ alors $I' \in \mathcal{I}$,

($I3$) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ et $|I_1| < |I_2|$ alors il existe $e \in I_2 \backslash I_1$ tel que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Les membres de $\mathcal{I}$ sont appelés les indépendants de M. Un sous-ensemble de E qui n'est pas dans $\mathcal{I}$ est appelé dépendant.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.
$(I3)$] Soient $I_1', I_2' \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2, sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.
$(I3)$] Soient $I_1', I_2' \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2, sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$.
Par l'absurde, supposons que $I_1 \cup e$ est linéairement dépendant pour tout $e \in I_2 \backslash I_1$.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.
$(I3)$] Soient $I_1', I_2' \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2, sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$.
Par l'absurde, supposons que $I_1 \cup e$ est linéairement dépendant pour tout $e \in I_2 \backslash I_1$. Soit W l'espace engendré par I_1 et I_2.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.
$(I3)$] Soient $I_1', I_2' \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2, sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$.
Par l'absurde, supposons que $I_1 \cup e$ est linéairement dépendant pour tout $e \in I_2 \backslash I_1$. Soit W l'espace engendré par I_1 et I_2.
D'une part, $dim(W) \geq |I_2|$ et d'autre part W est contenu dans l'espace engendré par I_1.

Matroïdes vectoriel

Théorème (Whitney 1935) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$. Soit $\mathcal{I}$ la famille des sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\} = E$ tel que l'ensemble des colonnes $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}$. Alors, $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

Démonstration : $(I1)$ et $(I2)$ sont triviales.
$(I3)$] Soient $I_1', I_2' \in \mathcal{I}$ tels que les vecteurs colonnes correspondants, disons I_1 et I_2, sont linéairement indépendants et avec $|I_1| < |I_2|$.
Par l'absurde, supposons que $I_1 \cup e$ est linéairement dépendant pour tout $e \in I_2 \backslash I_1$. Soit W l'espace engendré par I_1 et I_2.
D'une part, $dim(W) \geq |I_2|$ et d'autre part W est contenu dans l'espace engendré par I_1.

$$|I_2| \leq dim(W) \leq |I_1| < |I_2| \quad !!!$$

Matroïdes vectoriel

Soit A la matrice sur $\mathbb{R}$ suivante.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathcal{I}(M) =$
$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}.$

Circuits

Un sous-ensemble $X \subseteq E$ est dit dépendant minimal si tout sous-ensemble propre de X est indépendant. Un sous-ensemble dépendant minimal d'un matroïde M est appelé circuit de M. On dénote par $\mathcal{C}$ l'ensemble des circuits d'un matroïde.

Circuits

Un sous-ensemble $X \subseteq E$ est dit dépendant minimal si tout sous-ensemble propre de X est indépendant. Un sous-ensemble dépendant minimal d'un matroïde M est appelé circuit de M. On dénote par $\mathcal{C}$ l'ensemble des circuits d'un matroïde.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E si et seulement si $\mathcal{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

$(C1)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

$(C2)$ $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $C_1 \subseteq C_2$ alors $C_1 = C_2$,

$(C3)$ *(propriété d'élimination)* Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ et $e \in C_1 \cap C_2$ alors il existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \backslash \{e\}$.

Matroïde graphique

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera cycle l'ensemble des arêtes d'un cycle de G, et cycle élémentaire un tel ensemble minimal pour l'inclusion.

Matroïde graphique

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera cycle l'ensemble des arêtes d'un cycle de G, et cycle élémentaire un tel ensemble minimal pour l'inclusion.

Théorème L'ensemble des cycles élémentaires d'un graphe $G = (V, E)$, est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E.

Matroïde graphique

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera cycle l'ensemble des arêtes d'un cycle de G, et cycle élémentaire un tel ensemble minimal pour l'inclusion.

Théorème L'ensemble des cycles élémentaires d'un graphe $G = (V, E)$, est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E.

Un tel matroïde est noté $M(G)$ et appelé graphique.

Matroïde graphique

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera cycle l'ensemble des arêtes d'un cycle de G, et cycle élémentaire un tel ensemble minimal pour l'inclusion.

Théorème L'ensemble des cycles élémentaires d'un graphe $G = (V, E)$, est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E.

Un tel matroïde est noté $M(G)$ et appelé graphique.

Démonstration : Vérifier $(C1), (C2)$ et $(C3)$.

Matroïde graphique

Dans un graphe $G = (V, E)$, on appellera cycle l'ensemble des arêtes d'un cycle de G, et cycle élémentaire un tel ensemble minimal pour l'inclusion.

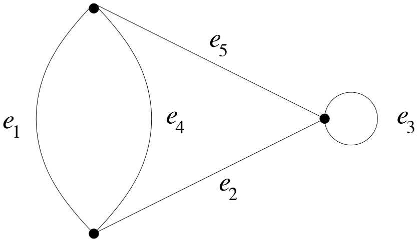
Théorème L'ensemble des cycles élémentaires d'un graphe $G = (V, E)$, est l'ensemble des circuits d'un matroïde sur E.

Un tel matroïde est noté $M(G)$ et appelé graphique.

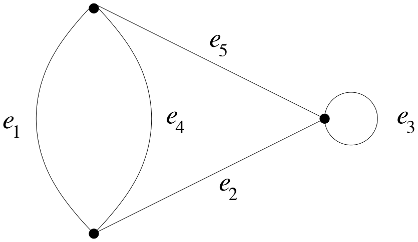
Démonstration : Vérifier $(C1), (C2)$ et $(C3)$.

Un sous-ensemble d'arêtes $I \subset \{e_1, \dots, e_n\}$ de G est indépendant si le graphe induit par I ne contient pas de cycle.

Matroïde graphique



Matroïde graphique



On pourra vérifier que $M(G)$ est isomorphe à $M(A)$ (sous la bijection $e_i \to i$).

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matroïde graphique

Théorème Un matroïde graphique est toujours vectoriel.

Matroïde graphique

Théorème Un matroïde graphique est toujours vectoriel.

Démonstration (idée) Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\{x_i,\ i \in V\}$ la base canonique d'un espace vectoriel sur un corps quelconque.

Matroïde graphique

Théorème Un matroïde graphique est toujours vectoriel.

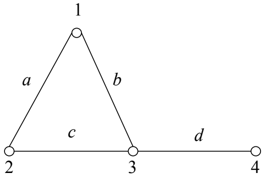
Démonstration (idée) Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\{x_i,\ i \in V\}$ la base canonique d'un espace vectoriel sur un corps quelconque.

On peut vérifier que le graphe $G = (V, E)$ est associé au même matroïde que l'ensemble des vecteurs $x_i - x_j$ pour $(i, j) \in E$.

Matroïde graphique

Soit M le matroïde graphique obtenu à partir de G et soit A la matrice construit suivant la construction du théorème.

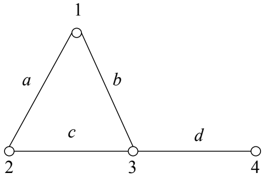
G



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matroïde graphique

Soit M le matroïde graphique obtenu à partir de G et soit A la matrice construit suivant la construction du théorème.

G 

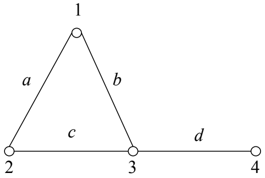
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M(G)$ isomorphe à $M(A)$ $(a \to y_1, b \to y_2, c \to y_3, d \to y_4)$.

Matroïde graphique

Soit M le matroïde graphique obtenu à partir de G et soit A la matrice construit suivant la construction du théorème.

G



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M(G)$ isomorphe à $M(A)$ $(a \to y_1, b \to y_2, c \to y_3, d \to y_4)$.
Le cycle formé par les arêtes $a = \{1,2\}, b = \{1,3\}$ et $c = \{2,3\}$ dans le graphe correspond à la depéndance linéaire $y_2 - y_1 = y_3$.

Bases

Une base d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). On dénote par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases d'un matroïde.

Bases

Une base d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). On dénote par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases d'un matroïde.

Lemme Les bases d'un matroïde sont équicardinales.

Bases

Une base d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). On dénote par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases d'un matroïde.

Lemme Les bases d'un matroïde sont équicardinales.

Démonstration : Par contradiction.

Bases

Une base d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). On dénote par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases d'un matroïde.

Lemme Les bases d'un matroïde sont équicardinales.

Démonstration : Par contradiction.

La famille $\mathcal{B}$ vérifie les conditions suivantes :

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

$(B2)$ *(propriété d'échange)* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \backslash B_2$ alors il existe $y \in B_2 \backslash B_1$ tel que $(B_1 \backslash x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Bases

Une base d'un matroïde est un ensemble indépendant maximal (pour l'inclusion). On dénote par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases d'un matroïde.

Lemme Les bases d'un matroïde sont équicardinales.

Démonstration : Par contradiction.

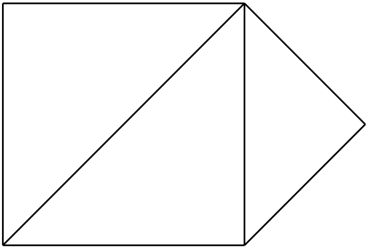
La famille $\mathcal{B}$ vérifie les conditions suivantes :

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

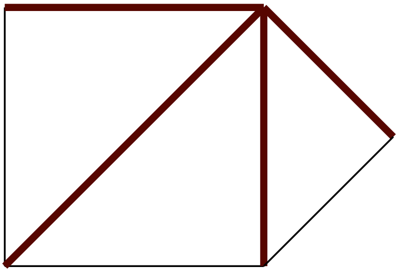
$(B2)$ *(propriété d'échange)* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \backslash B_2$ alors il existe $y \in B_2 \backslash B_1$ tel que $(B_1 \backslash x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{I}$ est la famille des sous-ensembles qui sont contenus dans l'un de ensembles de $\mathcal{B}$ alors $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.

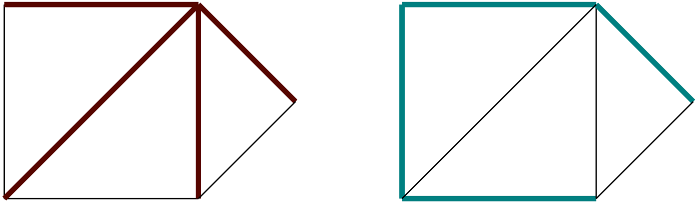
Bases



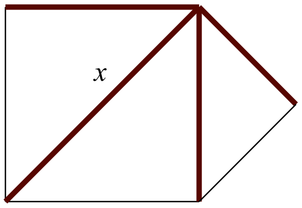
Bases

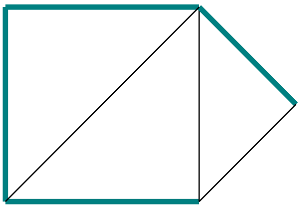


Bases

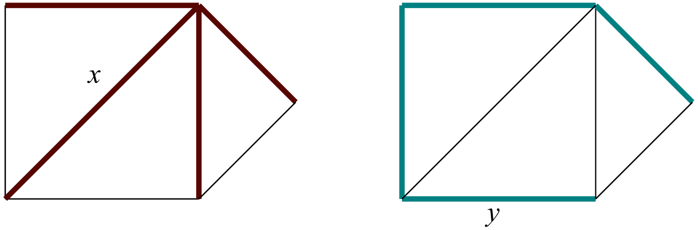


Bases

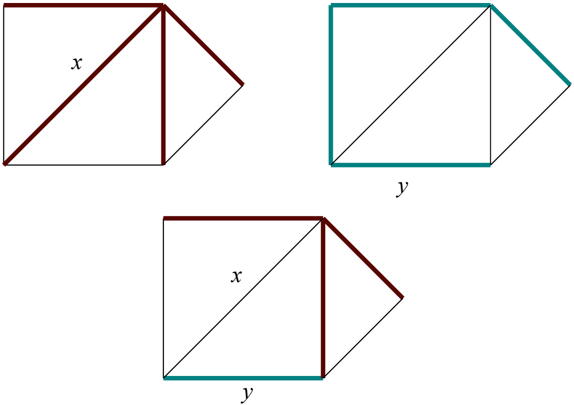




Bases



Bases



Rang

Le rang d'un ensemble $X \subseteq E$ est défini par

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}.$$

Rang

Le rang d'un ensemble $X \subseteq E$ est défini par

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}.$$

$r = r_M$ est la fonction rang du matroïde $(E, \mathcal{I})$ (où $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\}$) si et seulement si r vérifie les conditions suivantes :

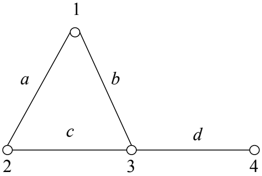
$(R1)$ $0 \leq r(X) \leq |X|$, pour tout $X \subseteq E$,

$(R1)$ $r(X) \leq r(Y)$, pour tous $X \subseteq Y$,

$(R2)$ *(inégalité sous-modulaire)* $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ pour tous $X, Y \subset E$.

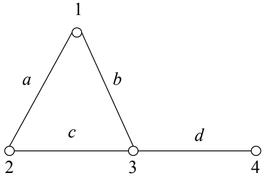
Rang

Soit M le matroïde graphique obtenu à partir de G



Rang

Soit M le matroïde graphique obtenu à partir de G



On pourra vérifier que :
$r_M(\{a,b,c\}) = r_M(\{c,d\}) = r_M(\{a,d\}) = 2$ et
$r(M(G)) = r_M(\{a,b,c,d\}) = 3$.

Algorithme Glouton

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de sous-ensembles de E vérifiant $(I1)$ et $(I2)$.
Soit $w : E \to \mathbb{R}$, et soit $w(X) = \sum_{x \in X} w(x), X \subseteq E, w(\emptyset) = 0$.

Algorithme Glouton

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de sous-ensembles de E vérifiant $(I1)$ et $(I2)$.
Soit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $w(X) = \sum_{x \in X} w(x), X \subseteq E, w(\emptyset) = 0$.

Un problème d'optimisation consiste alors à trouver un ensemble maximal B de $\mathcal{I}$ avec un poids maximal (ou minimal).

Algorithme glouton pour $(\mathcal{I}, w)$

$X_0 = \emptyset$
$j = 0$
Tant qu'il existe $e \in E \backslash X_j \vert X_j \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ faire
    Choisir un élément e_{j+1} de poids maximum
    $X_{j+1} \leftarrow X_j \cup \{e_{j+1}\}$
    $j \leftarrow j + 1$
$B_G \leftarrow X_j$
Returner B_G

Algorithme Glouton

Théorème $(\mathcal{I}, E)$ est un matroïde si et seulement si les conditions suivante sont vérifiées :

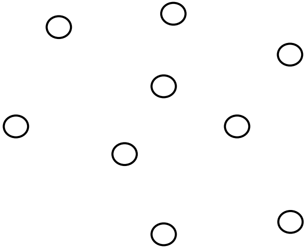
$(I1)$ $\emptyset \in \mathcal{I}$,

$(I2)$ $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,

(G) Pour toute fonction $w : E \to \mathbb{R}$, l'algorithme glouton donne un ensemble maximal de $\mathcal{I}$ de poids maximal.

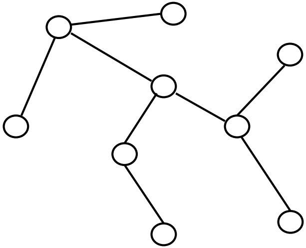
Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

On veut construire un réseau routière reliant les 9 villes (et de cout minimum).

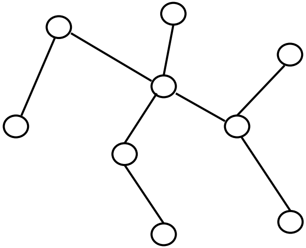


Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

On veut construire un réseau routière reliant les 9 villes (et de cout minimum).

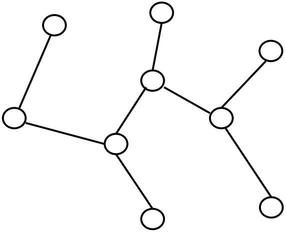


On veut construire un réseau routière reliant les 9 villes (et de cout minimum).



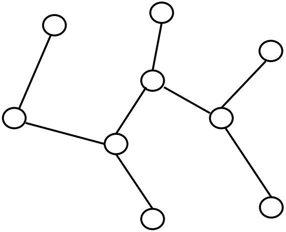
Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

On veut construire un réseau routière reliant les 9 villes (et de cout minimum).



Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

On veut construire un réseau routière reliant les 9 villes (et de cout minimum).



Théorème (Caley) Il y a n^{n-2} arbres numérotés avec n sommets.

Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

Théorème (Kruskal) Etant donné un graphe complet avec de poids sur les arêtes. Il existe un algorithme polynomial qui trouve un arbre couvrant de poids minimal.

Application 1 : Arbre couvrant de poids minimal

Théorème (Kruskal) Etant donné un graphe complet avec de poids sur les arêtes. Il existe un algorithme polynomial qui trouve un arbre couvrant de poids minimal.

En effet, l'algorithme glouton retour une base (indépendant maximal) de poids minimal en considerant le matroïde graphique associé au graphe complet et la fonction $w(e)$, $e \in E(G)$ est donné par le poids sur chaque arête.

Matroïde transversal

Soit $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$, $n \geq k$.

Matroïde transversal

Soit $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$, $n \geq k$.

Un transversal de $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$ de S tel que $e_{j_i} \in A_i$.

Matroïde transversal

Soit $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$, $n \geq k$.

Un transversal de $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$ de S tel que $e_{j_i} \in A_i$.

Un ensemble $X \subseteq S$ est dit un transversal partiel de $\mathcal{A}$ s'il existe $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ tel que X est un transversal de $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}\}$.

Matroïde transversal

Soit $G = (S, \mathcal{A}; E)$ le graphe biparti formé à partir de $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ et deux sommets $e_i \in S$, $A_j \in \mathcal{A}$ sont reliés si et seulement si $e_i \in A_j$.

Matroïde transversal

Soit $G = (S, \mathcal{A}; E)$ le graphe biparti formé à partir de $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ et deux sommets $e_i \in S$, $A_j \in \mathcal{A}$ sont reliés si et seulement si $e_i \in A_j$.

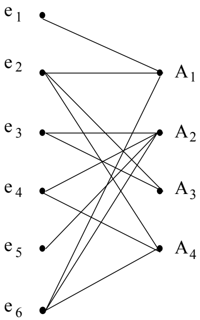
Un ensemble X est un transversal partiel de $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe un couplage dans $G = (U, V; E)$ où chaque arête du couplage admet un sommet de U correspondant à l'un d'éléments de X.

Matroïde transversal

$E = \{e_1, \dots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $A_3 = \{e_2, e_3\}$ et $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$.

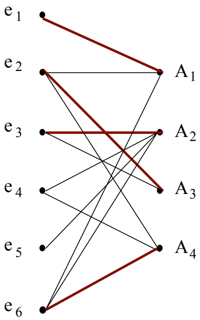
Matroïde transversal

$E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $A_3 = \{e_2, e_3\}$ et $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$.



Matroïde transversal

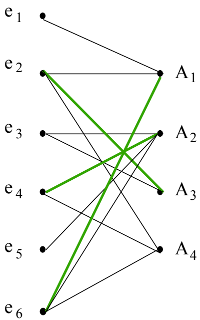
$E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $A_3 = \{e_2, e_3\}$ et $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$.



$\{e_1, e_3, e_2, e_6\}$ est un transversal de $\mathcal{A}$.

Matroïde transversal

$E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_6\}$, $A_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $A_3 = \{e_2, e_3\}$ et $A_4 = \{e_2, e_4, e_6\}$.



$X = \{e_6, e_4, e_2\}$ est un transversal partiel de $\mathcal{A}$ car X est transversal de $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Matroïde transversal

Théorème Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$. Alors l'ensemble de transversals partiels de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des indepéndants d'un matroïde.

Matroïde transversal

Théorème Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$. Alors l'ensemble de transversals partiels de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des indepéndants d'un matroïde.

Démonstration (idée) : On peut montrer que la conditions (I3) est vérifiée sur deux couplages (l'un avec plus d'éléments que l'autre).

Matroïde transversal

Théorème Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}, A_i \subseteq S$. Alors l'ensemble de transversals partiels de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des indepéndants d'un matroïde.

Démonstration (idée) : On peut montrer que la conditions (I3) est vérifiée sur deux couplages (l'un avec plus d'éléments que l'autre).

Un tel matroïde est dit matroïde transversal.

Application 2 : problème d'assignation

$\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonnées par rapport à leur importance (priorités).

Application 2 : problème d'assignation

$\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonnées par rapport à leur importance (priorités).

$\{E_i\}$ un ensemble d'employés capables de réaliser une ou plusieurs de ces tâches.

Application 2 : problème d'assignation

$\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonnées par rapport à leur importance (priorités).

$\{E_i\}$ un ensemble d'employés capables de réaliser une ou plusieurs de ces tâches.

Les tâches seront faites en même temps (et donc chaque employé ne peut faire qu'une seule tâche à la fois).

Application 2 : problème d'assignation

$\{T_i\}$ un ensemble de tâches ordonnées par rapport à leur importance (priorités).

$\{E_i\}$ un ensemble d'employés capables de réaliser une ou plusieurs de ces tâches.

Les tâches seront faites en même temps (et donc chaque employé ne peut faire qu'une seule tâche à la fois).

Le problème est d'assigner les tâches aux employés de façon optimale (en maximisant les priorités).

Application 2 : problème d'assignation

- Tâches à réaliser : $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

Application 2 : problème d'assignation

- Tâches à réaliser : $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.
- Priorités : $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$.

Application 2 : problème d'assignation

- Tâches à réaliser : $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

- Priorités : $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$.

- Employé : e_1 capable de réaliser les tâches t_1 et t_2, e_2 capable de réaliser les tâches t_2 et t_3, et e_3 capable de réaliser la tâche t_4.

Application 2 : problème d'assignation

- Tâches à réaliser : $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

- Priorités : $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$.

- Employé : e_1 capable de réaliser les tâches t_1 et t_2, e_2 capable de réaliser les tâches t_2 et t_3, et e_3 capable de réaliser la tâche t_4.

- Matroïde transversal $M = (\mathcal{I}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\})$ où $\mathcal{I}$ est donné par l'ensemble de couplages du graphe biparti $G = (U, V; E)$ avec $U = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $V = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Application 2 : problème d'assignation

- Tâches à réaliser : $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.
- Priorités : $w(t_1) = 10, w(t_2) = 3, w(t_3) = 3$ et $w(t_4) = 5$.
- Employé : e_1 capable de réaliser les tâches t_1 et t_2, e_2 capable de réaliser les tâches t_2 et t_3, et e_3 capable de réaliser la tâche t_4.
- Matroïde transversal $M = (\mathcal{I}, \{t_1, t_2, t_3, t_4\})$ où $\mathcal{I}$ est donné par l'ensemble de couplages du graphe biparti $G = (U, V; E)$ avec $U = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $V = \{e_1, e_2, e_3\}$.
- En appliquant l'algorithme glouton à M on obtient $X_0 = \emptyset, X_1 = \{t_1\}, X_2 = \{t_1, t_4\}$ et $X_3 = \{t_1, t_4, t_2\}$.